$\Rightarrow \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{2(n+2)}\right]_1^2 \leq \text{Ln2} - (n+1)\,U_n \leq \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{(n+2)}\right]_1^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Ln2} - (n+1)\,U_n \leq \frac{1}{(n+2)}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(n+2)} = 0$

d'où $\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - (n+1)\,U_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} ((n+1)\,U_n) = \text{Ln2}$

3) $n \geq 1$ et $x \geq 0$

$S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots\ldots$

$\ldots + (-1)^n (x-1)^n$

a) $S_n(x)$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suites géométrique de raison $q = -(x-1) \neq 1$

d'où

$S_n(x) = \frac{1-[-(x-1)]^{n+1}}{1+(x-1)}$

$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$

$= \frac{1}{x} - \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$

b) on a : pour $n \in \mathbb{N}^*$

$\text{Ln2} - (n+1)\,U_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

$\Rightarrow (-1)^{n+1}[\text{Ln2} - (n+1)\,U_n]$

$= \int_1^2 \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - S_n(x)\right)\,dx$

$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \delta_n(x)dx$

$= [\text{Ln}x]_1^2 - \int_1^2 \delta_n(x)dx$

$= \text{Ln2} - \left[x - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$

$= \text{Ln2} - \left[\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) - 1\right]_1^2$

$= \text{Ln2} - \left[\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]_1^2$

$= \text{Ln2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \text{Ln2} - V_n$

D'où

$\text{Ln2} - V_n = (-1)^{n+1}[\text{Ln2} - (n+1)U_n]$

3) $\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - (n+1)\,U_n) = 0$

$|\text{Ln2} - (n+1)\,U_n| = |\text{Ln2} - V_n|$

D'où

$\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - V_n) = 0$

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} V_n = \text{Ln2}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn